

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记12——常微分方程和分离变量

常微分方程

含有未知函数的导数，如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

的方程是微分方程。一般的，凡是表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程。未知函数是一元函数的，叫常微分方程；未知函数是多元函数的叫做偏微分方程。本文主要介绍常微分方程。

概念往往令人迷惑，还是看看实际的例子：

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

目标是求解x和y的关系。将等式转换：

$$dy = 2x dx$$
$$\int dy = \int 2x dx$$
$$y + C_1 = x^2 + C_2$$
$$y = x^2 + C_2 - C_1$$
$$y = x^2 + C$$

这就是最终答案。

实际上，常微分的求解过程就是利用不定积分的知识：

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$
$$dy = f(x) dx$$
$$y = \int dy = \int f(x) dx$$

分离变量

分离变量是求解常微分方程的一种方法，适用于 $dy/dx = f(x)g(y)$ 的形式。先看下面的示例：

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)y = 0$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

在物理学中它有一个专有名称,叫做“淹没算符”。此处没必要去纠结物理学概念,仅需要在数学上求解这个方程。但这个表达式和以往所见的微分表达式不一样,首先将方程展开,将其转换为我们熟悉的形式:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy$$

想要求解方程, 需要继续转换:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -x dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -x dx \\ \ln y + C_1 &= -\frac{x^2}{2} + C_2 \\ \ln y &= -\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 = -\frac{x^2}{2} + C, \quad (y > 0) \\ e^{\ln y} &= e^{-\frac{x^2}{2} + C} \\ y &= Ae^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (A = e^C) \end{aligned}$$

这就是求得的答案。

但上述答案只求解了y>0的情况, y≤0时尚未考虑。可以通过求导来验证答案是否是通解:

令a为任意常数, 将解转换为y=ae^{-x²/2}, 当a≠0时, 实际上a=±A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dae^{-\frac{x^2}{2}}}{dx} = \frac{ade^{-\frac{x^2}{2}}}{dx} = a(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\left(ae^{-\frac{x^2}{2}} \right) = -xy$$

答案是通解, 最终答案是y=ae^{-x²/2}, a是任意常数。

实际上该答案就是正态分布函数, 也就是著名的高斯函数, 其原型:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

其中a,b,c∈R

高斯函数的图形在形状上像一个倒悬着的钟。a表示得到曲线的高度, b是指曲线中心线在x轴的偏移, c半峰宽度(函数峰值一半处相距的宽度)。

当b=0,c=0,a=5时, 图像如下:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

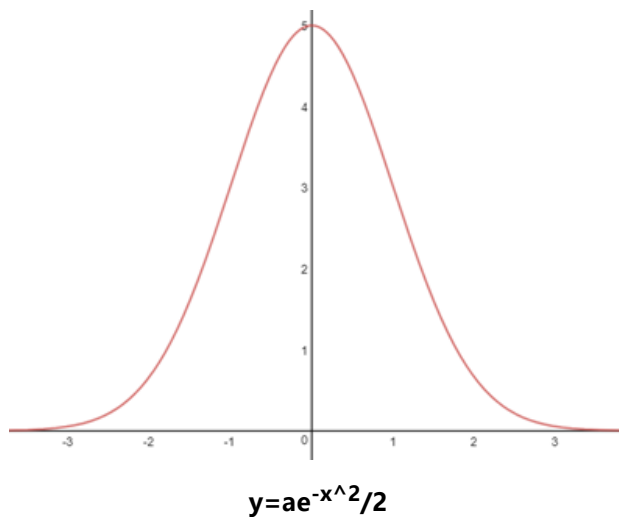
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \sqrt{2gh}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU



示例

示例1

曲线切线与经过原点的直线相交，曲线在交点的切线是直线斜率的两倍，求曲线表达式。

首先将上述文字转换为方程，设交点是(x,y)，曲线是 $y=f(x)$ ，则曲线切线的斜率为 y' ，直线斜率为 y/x ，于是得到下面关系式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\ln y = 2 \ln x + C$$

$$e^{\ln y} = e^{2 \ln x + C}$$

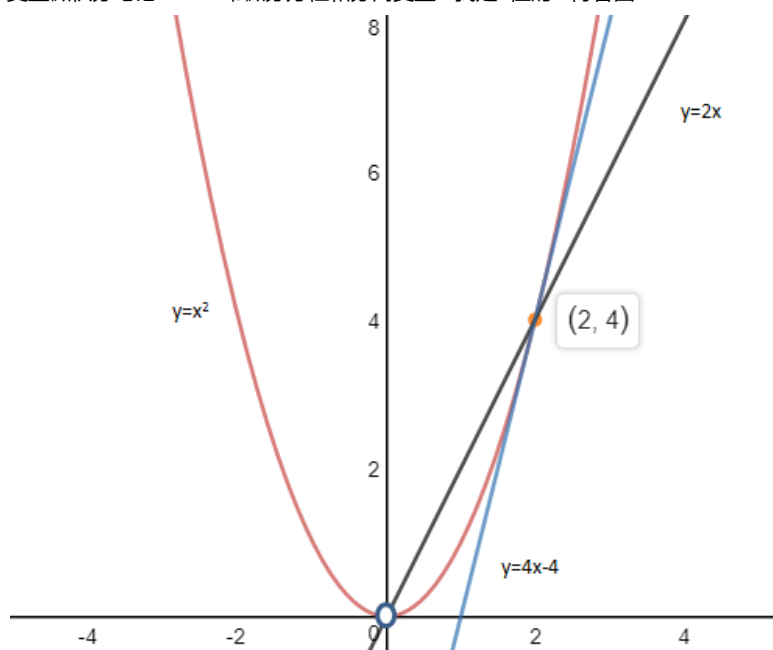
$$y = Ax^2, (A = e^C, y > 0)$$

通过验证寻找通解，设 $a = \pm A$ ，则a为非零的任意常数， $y = ax^2$ ，验证该解：

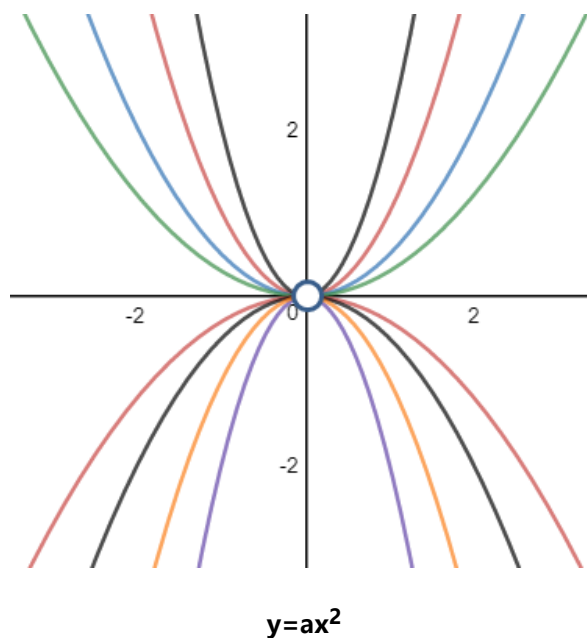
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dax^2}{dx} = 2ax = \frac{2ax^2}{x} = \frac{2y}{x}, (x \neq 0)$$

答案符合最初等式。最终结果是 $y = ax^2$ ， $a \in \mathbb{R}$ ， $x \neq 0$

当 $a=1$ 时，曲线 $y = x^2$ ， $y' = 2x$ ；则在(2,4)点的切线斜率是4，切线是 $y = 4x + b$ ；将(2,4)代入切线， $4 = 4 \times 2 + b$ ， $b = -4$ ，在(2,4)点的切线为 $y = 4x - 4$ 。下图是满足条件的曲线：



$y=ax^2$ 实际上是一族曲线:



示例2

微分方程 $x\frac{dy}{dx} = (x^2+x)(y^2+1)$, 求 $y=f(x)$

$$\frac{xdy}{dx} = (x^2+x)(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x)}{x}(y^2+1) = (x+1)(y^2+1), \quad x \neq 0$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = (x+1)dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x+1)dx$$

此处需要复习一下三角函数的求导公式:

基本初等函数求导公式

- | | |
|--|--|
| (1) $(C)' = 0$ | (2) $(x^a)' = ax^{a-1}$ |
| (3) $(\sin x)' = \cos x$ | (4) $(\cos x)' = -\sin x$ |
| (5) $(\tan x)' = \sec^2 x$ | (6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$ |
| (7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ | (8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ |
| (9) $(a^x)' = a^x \ln a$ | (10) $(e^x)' = e^x$ |
| (11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | (12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| (13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

由上面的公式15,

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int (x + 1) dx$$

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

验证, 已知三角函数公式 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x + 1) = \left(\tan^2\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) + 1\right)(x + 1) = (y^2 + 1)(x + 1)$$

示例3

$d^2y/dx^2 = 6x$, 求 $y=f(x)$, $y=f(x)$ 在 $(1,1)$ 点有水平切线。

题目中涉及到二阶导数和一个限制条件。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1$$

$$dy = (3x^2 + C_1)dx$$

$$\int dy = \int (3x^2 + C_1)dx$$

$$y = x^3 + C_1x + C_2$$

通过限制条件得知:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3x^2 + C_1 = 3 \times 1^2 + C_1 = 0$$

$$C_1 = -3$$

$$y = x^3 - 3x + C_2$$

将 $(1,1)$ 代入上式, $1 = 1 - 3 + C_2$, $C_2 = 3$

最终, $y = x^3 - 3x + 3$

总结

- 1. 使用不定积分求解常微分方程
- 2. 分离变量是求解常微分方程的一种方法，适用于 $dy/dx = f(x)g(y)$ 的形式

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [常微分方程](#), [分离变量](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记11——微分和不定积分](#)
» 下一篇: [线性代数笔记1——矩阵的基本运算](#)

posted on 2017-10-12 22:48 我是8位的 阅读(2598) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:
· 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务

- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes